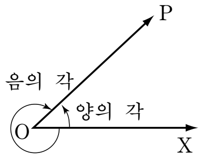
1. 삼각함수

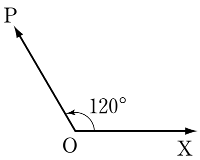
1 각

오른쪽 그림과 같이 한 점 O로부터 시작되는 반직선 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OP}$로 만들어지는 도형을 각이라고 한다.
이 때, $\angle XOP$의 크기는 $\overrightarrow{OP}$가 $\overrightarrow{OX}$를 출발하여 $\overrightarrow{OP}$의 위치까지 회전하였을 때의 회전한 양으로 정의하고 $\overrightarrow{OX}$를 시초선, $\overrightarrow{OP}$를 동경이라고 한다.
또, 동경 $\overrightarrow{OP}$가 $\overrightarrow{OX}$에서 점 O의 둘레를 시계 반대 방향으로 회전하여 생기는 각을 양의 각, 시계 방향으로 회전하여 생기는 각을 음의 각이라 한다.

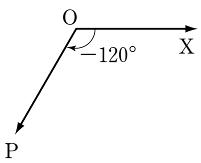


보기 다음 각의 동경의 위치를 그림으로 나타내어라.
(1) $120°$ (2) $-120°$ (3) $480°$

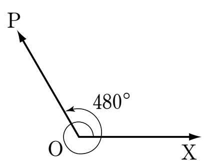
연구 (1)



(2)

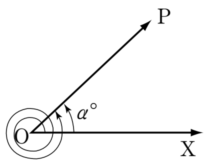


(3)



2 일반각

일반적으로 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 $\alpha°$라 하면, 동경 OP가 나타내는 모든 각의 크기는
$$\mathbf{360° \times n + \alpha°} \text{ (단, } n\text{은 정수)}$$
로 나타낼 수 있다. 이와 같이 표시되는 각을 동경 OP가 나타내는 일반각이라 한다.



보기 1. 다음 각의 동경이 나타내는 일반각 θ를 구하여라.
(1) $30°$ (2) $1500°$

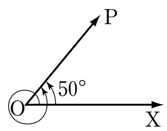
연구 주어진 각을 $360° \times n + \alpha°$ (단, n은 정수)의 꼴로 나타낸다.
(1) $30° = 360° \times 0 + 30°$ $\therefore$ $\boldsymbol{\theta = 360° \times n + 30°}$ (단, n은 정수)
(2) $1500° = 360° \times 4 + 60°$ $\therefore$ $\boldsymbol{\theta = 360° \times n + 60°}$ (단, n은 정수)

보기 2. $2100°$는 제 몇 사분면의 각인가?

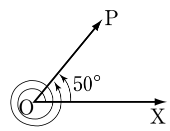
연구 $2100° = 360° \times 6 - 60°$ $\therefore$ 제 **4**사분면의 각이다.

더 알아보자

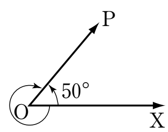
시초선 OX는 고정되어 있으므로 $\angle XOP$의 크기가 주어지면 동경 OP의 위치는 하나로 정해진다. 그러나 동경 OP의 위치가 정해지더라도 동경 OP가 나타내는 각의 크기는 하나로 정해지지 않는다.



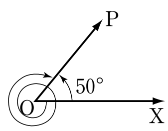
$360° \times 1 + 50°$



$360° \times 2 + 50°$



$360° \times (-1) + 50°$



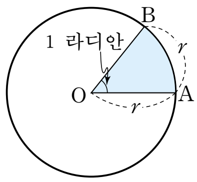
$360° \times (-2) + 50°$

③ 호도법

오른쪽 그림에서와 같이 반지름의 길이와 같은 원호에 대한 중심각의 크기를

1 라디안(radian)

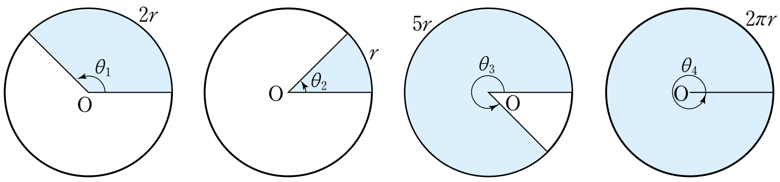
이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다.



보기 반지름의 길이가 r 인 부채꼴에서 호의 길이가 각각 $2r$, r, $5r$, $2\pi r$ 인 부채꼴의 중심각의 크기 θ_1, θ_2, θ_3, θ_4를 구하여라.

연구 중심각을 호도법으로 나타낼 때에는 1라디안의 정의에 의해

$(\text{중심각의 크기})=\dfrac{(\text{호의 길이})}{(\text{반지름의 길이})}$ 임을 이용한다.



$\theta_1=\dfrac{2r}{r}=\mathbf{2}$ $\quad\theta_2=\dfrac{r}{r}=\mathbf{1}$ $\quad\theta_3=\dfrac{5r}{r}=\mathbf{5}$ $\quad\theta_4=\dfrac{2\pi r}{r}=\boldsymbol{2\pi}$

④ 육십분법과 호도법과의 관계

(1) 1라디안$=\dfrac{180°}{\pi}\fallingdotseq 57°17'45''$

(2) $1°=\dfrac{\pi}{180}$ 라디안$\fallingdotseq 0.01745$ 라디안

보기 **1.** 다음 육십분법으로 나타낸 각을 호도법으로 고쳐 써라.

(1) $30°$ (2) $120°$ (3) $-225°$

연구 육십분법의 각을 호도법으로 고칠 때에는 $1°$는 $\dfrac{\pi}{180}$ 라디안이므로

$x°$는 $x°\times\dfrac{\pi}{180°}$ 라디안이다.

(1) $30°$는 $30°\times\dfrac{\pi}{180°}=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$ (2) $120°$는 $120°\times\dfrac{\pi}{180°}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$

(3) $-225°$는 $-225°\times\dfrac{\pi}{180°}=\boldsymbol{-\dfrac{5}{4}\pi}$

보기 **2.** $\dfrac{\pi}{3}$ 라디안을 육십분법으로 나타내어라.

연구 1라디안은 $\dfrac{180°}{\pi}$ 이므로 x라디안은 $x\times\dfrac{180°}{\pi}$ 이다.

따라서 $\dfrac{\pi}{3}$는 $\dfrac{\pi}{3}\times\dfrac{180°}{\pi}=\mathbf{60°}$이다.

더 알아보자

❀ 각의 크기를 도(°)를 사용하여 나타내는 방법을 육십분법이라 한다.

❀ 호도법에서 쓰이는 단위 라디안(또는 호도)은 보통 생략하고 쓰지 않는 경우가 많다.
이를테면, 2라디안은 2로, π라디안은 π로 나타낸다.

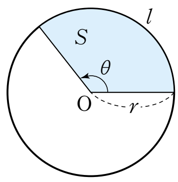
❀ $360°$가 2π라디안이므로 $1°$는 $\dfrac{\pi}{180}$ 라디안이다.

5 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$$\boldsymbol{l=r\theta}$$

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl}$$



증명 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로
$l : 2\pi r=\theta : 2\pi$에서 $l=r\theta$
또, 부채꼴의 넓이도 중심각의 크기에 비례하므로
$S : \pi r^2=\theta : 2\pi$에서 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$

더 알아보자

$r=1$이면 $l=\theta$
따라서, 단위원에서 중심각의 라디안은 호의 길이를 나타내는 실수와 같다.

보기 **1.** 반지름의 길이가 3cm, 중심각의 크기가 2(라디안)인 부채꼴의 호의 길이 l과 넓이 S를 구하여라.

연구 $l=r\theta=3\times2=6(\text{cm})$

$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times3^2\times2=9(\text{cm}^2)$

$\therefore\ l=\mathbf{6cm},\ S=\mathbf{9cm^2}$

보기 **2.** 반지름의 길이가 4cm, 호의 길이가 6cm인 부채꼴이 있다. 이 부채꼴의 중심각의 크기 θ와 넓이 S를 구하여라.

연구 $l=r\theta$에서 $\theta=\frac{l}{r}$ $\quad\therefore\ \theta=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}(rad)$

$S=\frac{1}{2}rl$에서 $S=\frac{1}{2}\times4\times6=12(\text{cm}^2)$

$\therefore\ \theta=\frac{3}{2}$라디안, $S=\mathbf{12cm^2}$

보기 **3.** 중심각이 $\frac{\pi}{3}$(라디안)이고, 넓이가 $6\pi\,\text{cm}^2$인 부채꼴이 있다. 이 부채꼴의 반지름의 길이 r와 호의 길이 l을 구하여라.

연구 중심각과 넓이가 주어져 있으므로

$S=\frac{1}{2}r^2\theta$에서 $6\pi=\frac{1}{2}r^2\times\frac{\pi}{3}$, $r^2=36$ $\quad\therefore\ r=6(\text{cm})$

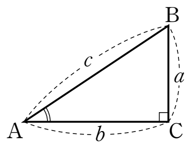
또, $l=r\theta$에서 $l=6\times\frac{\pi}{3}=2\pi(\text{cm})$

$\therefore\ r=\mathbf{6cm},\ l=\mathbf{2\pi cm}$

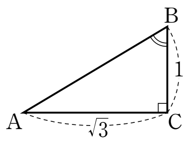
6 삼각비의 정의

(1) $\sin A=\frac{a}{c}$, $\cos A=\frac{b}{c}$, $\tan A=\frac{a}{b}$

(2) $\mathrm{cosec}\, A=\frac{c}{a}$, $\sec A=\frac{c}{b}$, $\cot A=\frac{b}{a}$



보기 오른쪽 그림의 △ABC에서 ∠B에 대한 삼각비를 구하여라.



연구 피타고라스의 정리를 이용하면

$\overline{AB}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

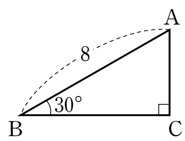
$\therefore \sin B=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $\cos B=\mathbf{\frac{1}{2}}$, $\tan B=\mathbf{\sqrt{3}}$,

$\mathrm{cosec}\, B=\mathbf{\frac{2}{\sqrt{3}}}$, $\sec B=\mathbf{2}$, $\cot B=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

7 특수각의 삼각비의 값

A \ 삼각비	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\mathrm{cosec}\, A$	$\sec A$	$\cot A$
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

보기 ∠C 가 직각인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=8$, ∠B$=30°$일 때, 나머지 두 변 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$의 길이를 각각 구하여라.



연구 $\sin 30°=\frac{\overline{AC}}{8}$에서

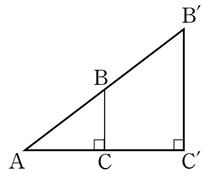
$\overline{AC}=8\sin 30°=8\times\frac{1}{2}=4$

$\cos 30°=\frac{\overline{BC}}{8}$에서

$\overline{BC}=8\cos 30°=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{AC}=\mathbf{4}$, $\overline{BC}=\mathbf{4\sqrt{3}}$

더 알아보자

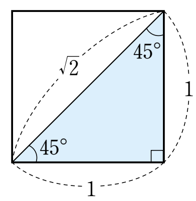


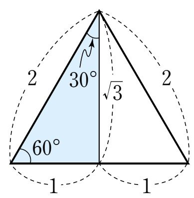
$\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}}$

$\cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}}$

$\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}}$

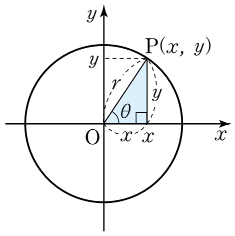
이와 같이, 한 각이 A인 직각삼각형을 만들면 이 삼각형의 크기에 관계없이 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$의 값이 일정하게 정해진다.





8 삼각함수의 정의

오른쪽 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원에서 동경 OP가 나타내는 일반각의 크기를 θ(라디안)라 하고 점 P의 좌표를 (x, y)라 할 때, θ에 대한 삼각함수를 다음과 같이 정의한다.



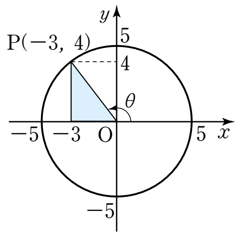
$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (\text{단, } x\neq0)$$

또, $x\neq0$, $y\neq0$일 때

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{r}{y},\quad \sec\theta=\frac{r}{x},\quad \cot\theta=\frac{x}{y}$$

보기 원점과 점 P$(-3, 4)$를 이은 선분을 동경으로 하는 각을 θ라 할 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

연구 $r=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$



$\therefore \sin\theta=\frac{y}{r}=\mathbf{\frac{4}{5}}$

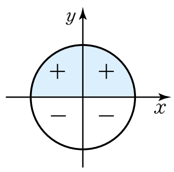
$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-3}{5}=\mathbf{-\frac{3}{5}}$

$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{-3}=\mathbf{-\frac{4}{3}}$

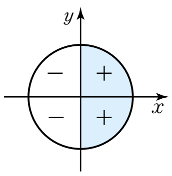
9 삼각함수의 값의 부호

삼각함수의 값의 부호는 동경 OP가 나타내는 일반각 θ가 제 몇 사분면의 각인가에 따라 다음과 같이 정해진다.

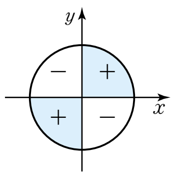
($\sin\theta$의 부호)



($\cos\theta$의 부호)



($\tan\theta$의 부호)



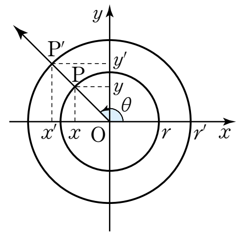
보기 θ가 제 3사분면의 각일 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 부호를 결정하여라.

연구 제 3사분면 위의 점 P(x, y)에서 x, y가 모두 음수이므로

$\sin\theta=\frac{y}{r}<0$, $\cos\theta=\frac{x}{r}<0$, $\tan\theta=\frac{y}{x}>0$

$\therefore$ $\mathbf{\sin\theta<0}$, $\mathbf{\cos\theta<0}$, $\mathbf{\tan\theta>0}$

더 알아보자



위 그림에서

$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{r}{r'}$

즉, $\frac{y}{r}=\frac{y'}{r'}$,

$\frac{x}{r}=\frac{x'}{r'}$,

$\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}$이다.

따라서 θ에 대한 비

$\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{x}$ $(x\neq0)$

의 값은 동경 위의 점 P의 위치에 관계없이 일정하다.

즉, $\theta \longrightarrow \frac{y}{r}$,

$\theta \longrightarrow \frac{x}{r}$,

$\theta \longrightarrow \frac{y}{x}$ $(x\neq0)$

와 같은 대응은 각각 함수를 나타낸다.

이 함수를 차례로 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라고 하며

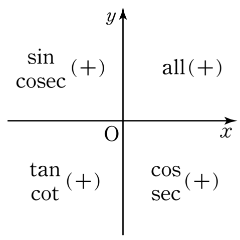
$\mathbf{\sin\theta=\frac{y}{r}}$,

$\mathbf{\cos\theta=\frac{x}{r}}$,

$\mathbf{\tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq0)}$

와 같이 나타낸다.

삼각함수의 부호



교과서 원리 확인 학습

일반각

1 다음 각에 대한 일반각을 써 보아라.

(1) $135°$　　(2) $855°$　　(3) $-945°$

Hint 주어진 각을 $360°\times n+\alpha°$ (단, n은 정수)의 꼴로 나타낸다.

(1) $135°=360°\times 0+135°$　$\therefore\ 360°\times n+135°$ (단, n은 정수)

(2) $855°=360°\times 2+135°$　$\therefore\ 360°\times n+135°$ (단, n은 정수)

(3) $-945°=360°\times(-3)+135°$　$\therefore\ 360°\times n+135°$ (단, n은 정수)

일반각

2 다음 각은 제 몇 사분면의 각인가?

(1) $225°$　　(2) $1110°$　　(3) $-1290°$

Hint 주어진 각을 $360°\times n+\alpha°$ $(0\leqq\alpha°<360°)$의 꼴로 고쳐서 생각한다.

(1) $225°=180°+45°$　$\therefore$ 제 3사분면의 각

(2) $1110°=360°\times 3+30°$　$\therefore$ 제 1사분면의 각

(3) $-1290°=360°\times(-4)+150°$　$\therefore$ 제 2사분면의 각

호도법

3 반지름의 길이가 r 인 부채꼴의 호의 길이가 πr 일 때, 이 부채꼴의 중심각 θ 를 구하여라.

Hint 중심각은 호의 길이를 반지름의 길이로 나눈 값과 같다. 따라서,

$$(\text{중심각 }\theta)=\frac{(\text{호의 길이})}{(\text{반지름의 길이})}=\frac{\pi r}{r}=\pi \qquad \therefore\ \theta=\pi(\text{라디안})$$

육십분법과 호도법의 관계

4 다음 육십분법으로 나타낸 각을 호도법으로 나타내어라.

(1) $45°$　　(2) $135°$　　(3) $225°$　　(4) $315°$

Hint $1°$가 $\dfrac{\pi}{180}$ 라디안이므로 $x°$는 $x°\times\dfrac{\pi}{180°}$ 라디안이다.

(1) $45°$는 $45°\times\dfrac{\pi}{180°}=\dfrac{\pi}{4}$　　(2) $135°$는 $135°\times\dfrac{\pi}{180°}=\dfrac{3}{4}\pi$

(3) $225°$는 $225°\times\dfrac{\pi}{180°}=\dfrac{5}{4}\pi$　　(4) $315°$는 $315°\times\dfrac{\pi}{180°}=\dfrac{7}{4}\pi$

정답 **1.** (1) $360°\times n+135°$(단, n은 정수) (2) $360°\times n+135°$(단, n은 정수) (3) $360°\times n+135°$ (단, n은 정수) **2.** (1) 제 3사분면 (2) 제 1사분면 (3) 제 2사분면 **3.** π **4.** (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{3}{4}\pi$ (3) $\frac{5}{4}\pi$ (4) $\frac{7}{4}\pi$

육십분법과 호도법의 관계

5 다음 호도법으로 나타낸 각을 육십분법으로 나타내어라.

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{5}{6}\pi$ (3) $\frac{7}{6}\pi$ (4) $\frac{11}{6}\pi$

Hint 1라디안은 $\frac{180°}{\pi}$이므로 x라디안은 $x\times\frac{180°}{\pi}$이다.

(1) $\frac{\pi}{6}$는 $\frac{\pi}{6}\times\frac{180°}{\pi}=30°$ (2) $\frac{5}{6}\pi$는 $\frac{5}{6}\pi\times\frac{180°}{\pi}=150°$

(3) $\frac{7}{6}\pi$는 $\frac{7}{6}\pi\times\frac{180°}{\pi}=210°$ (4) $\frac{11}{6}\pi$는 $\frac{11}{6}\pi\times\frac{180°}{\pi}=330°$

부채꼴의 호의 길이

6 반지름의 길이가 2, 중심각이 45°인 부채꼴의 호의 길이 l을 구하여라.

Hint $l=r\theta$에서 θ는 호도법의 각이므로 45°를 호도법으로 나타낸다.

$45°\times\frac{\pi}{180°}=\frac{\pi}{4}$(라디안) $\therefore l=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

부채꼴의 호의 길이

7 중심각이 3(라디안)이고 호의 길이가 6인 부채꼴이 있다. 이 부채꼴의 반지름의 길이를 구하여라.

Hint $l=r\theta$ 에서 $r=\frac{l}{\theta}=\frac{6}{3}=2$

부채꼴의 넓이

8 반지름의 길이가 3, 호의 길이가 6인 부채꼴의 넓이 S를 구하여라.

Hint $S=\frac{1}{2}rl$ 에서 $S=\frac{1}{2}\times3\times6=9$

부채꼴의 넓이

9 반지름의 길이가 4, 중심각이 60°인 부채꼴의 넓이 S를 구하여라.

Hint $S=\frac{1}{2}r^2\theta$에서 θ는 호도법의 각이므로 60°를 호도법으로 나타내면

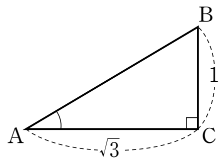
$60°\times\frac{\pi}{180°}=\frac{\pi}{3}$(라디안)

따라서, $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi$

정답 5. (1) 30° (2) 150° (3) 210° (4) 330° 6. $\frac{\pi}{2}$ 7. 2 8. 9 9. $\frac{8}{3}\pi$

10 삼각비의 정의

오른쪽 그림의 △ABC에서 ∠A에 대한 삼각비를 구하여라.



Hint 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\sin A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{2}$, $\cos A=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{cosec} A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=2$, $\sec A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot A=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\sqrt{3}$

11 특수각의 삼각비의 값

$\sin 30°+\cos 60°+\tan 45°$의 값을 구하여라.

Hint (주어진 식)$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+1=2$

12 삼각함수의 정의

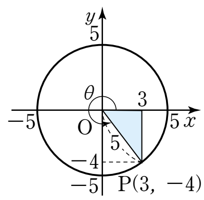
원점과 점 P(3, −4)를 잇는 선분을 동경으로 하는 각을 θ 라 할 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ 의 값을 구하여라.

Hint $r=\overline{OP}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$이므로

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-4}{5}=-\dfrac{4}{5}$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{3}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-4}{3}=-\dfrac{4}{3}$



13 특수각의 삼각함수의 값

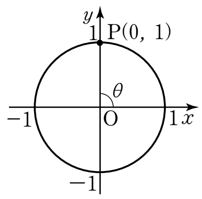
원점과 점 P(0, 1)을 잇는 선분을 동경으로 하는 각이 90°일 때 $\sin 90°$, $\cos 90°$, $\tan 90°$의 값을 구하여라.

Hint $r=\overline{OP}=1$이므로

$\sin 90°=\dfrac{y}{r}=\dfrac{1}{1}=1$

$\cos 90°=\dfrac{x}{r}=\dfrac{0}{1}=0$

$\tan 90°=\dfrac{y}{x}$에서 $x=0$이므로 정의되지 않는다.



14 삼각함수 값의 부호

점 P(x, y) 가 제 2 사분면의 점일 때, 동경 OP 가 나타내는 각 θ 에 대하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 부호를 구하여라.

Hint 점 P(x, y)가 제 2사분면 위에 있으므로 $x<0$, $y>0$이다.

따라서, $\sin\theta=\dfrac{y}{r}>0$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}<0$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}<0$이다.

$\therefore \sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

정답

10. $\sin A=\dfrac{1}{2}$, $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan A=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{cosec} A=2$, $\sec A=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot A=\sqrt{3}$ **11.** 2 **12.** $\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$, $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$, $\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$

13. $\sin 90°=1$, $\cos 90°=0$, $\tan 90°$는 정의되지 않는다. **14.** $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

기 초 쌓 기

1 일반각

다음에 주어진 각 중에서 동경이 일치하지 않는 것을 고르면?

① $-315°$ ② $45°$ ③ $225°$
④ $405°$ ⑤ $765°$

착안점 일반각이 $360° \times n + 45°$ (단, n은 정수)의 꼴로 표시되는 각은 모두 동경이 일치한다.

풀이 ① $-315° = 360° \times (-1) + 45°$
② $45° = 360° \times 0 + 45°$
③ $225° = 360° \times 0 + 225°$
④ $405° = 360° \times 1 + 45°$
⑤ $765° = 360° \times 2 + 45°$

답 ③

2 육십분법과 호도법의 관계

다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $90° = \dfrac{\pi}{2}$ ② $\dfrac{\pi}{4} = 45°$ ③ $60° = \dfrac{\pi}{3}$
④ $\dfrac{5}{6}\pi = 150°$ ⑤ $210° = \dfrac{2}{3}\pi$

착안점 $x° \Rightarrow x° \times \dfrac{\pi}{180°}$(라디안), y(라디안)$\Rightarrow y \times \dfrac{180°}{\pi}$

풀이 ① $90° \times \dfrac{\pi}{180°} = \dfrac{\pi}{2}$
② $\dfrac{\pi}{4} \times \dfrac{180°}{\pi} = 45°$
③ $60° \times \dfrac{\pi}{180°} = \dfrac{\pi}{3}$
④ $\dfrac{5}{6}\pi \times \dfrac{180°}{\pi} = 150°$
⑤ $210° \times \dfrac{\pi}{180°} = \dfrac{7}{6}\pi$

답 ⑤

3 부채꼴의 호의 길이와 넓이

중심각의 크기가 5(라디안)이고, 호의 길이가 $10\,\text{cm}$인 부채꼴의 넓이를 구하여라.

착안점 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$$l = r\theta,\quad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$

풀이 부채꼴의 반지름의 길이를 r로 놓으면
$\theta = 5$, $l = 10\,\text{cm}$이므로
$l = r\theta$ 에서 $r = \dfrac{l}{\theta} = \dfrac{10}{5} = 2(\text{cm})$

$$\therefore S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \times 2 \times 10 = \mathbf{10(cm^2)}$$

4 삼각비의 정의

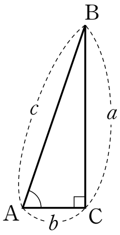
$\angle C = 90°$인 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 3\overline{CA}$인 관계가 성립할 때, $\cos A$의 값을 구하여라.

착안점 오른쪽 그림에서

$$\sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{a}{b}$$



풀이 문제의 조건에서 $\overline{AB} = 3\overline{CA}$이므로

$$\cos A = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA}}{3\overline{CA}} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

5 삼각함수의 정의

원점과 점 $P(-1, \sqrt{3})$을 지나는 동경 OP가 나타내는 각이 120°일 때,

$$\sin 120° \cos 120° \tan 120°$$

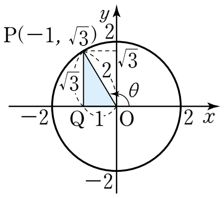
의 값을 구하여라.

착안점 원점과 점 $P(x, y)$를 지나는 동경 OP가 나타내는 각이 θ이고 $\overline{OP}=r$일 때

$\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ (단, $x\neq0$)

풀이 $r=\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\sin 120°=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\cos 120°=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}$

$=-\frac{1}{2}$

$\tan 120°=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$

$\therefore \sin 120° \cos 120° \tan 120°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-\sqrt{3})=\mathbf{\frac{3}{4}}$

6 특수각의 삼각함수의 값

원점과 점 $P(-1, 0)$을 지나는 동경 OP가 나타내는 각이 180°일 때, 180°에 대한 사인 함수, 코사인 함수, 탄젠트함수의 값을 각각 구하여라.

착안점 원점과 점 $P(x, y)$를 지나는 동경 OP가 나타내는 각이 θ이고 $\overline{OP}=r$일 때

$\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$(단, $x\neq0$)

풀이 $r=\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$이므로

$\sin 180°=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0$

$\cos 180°=\frac{x}{r}=\frac{-1}{1}=-1$

$\tan 180°=\frac{y}{x}=\frac{0}{-1}=0$

$\therefore$ **$\sin 180°=0$, $\cos 180°=-1$,**

$\tan 180°=0$

7 삼각함수의 정의

제 3사분면 위의 점 $P(a, b)$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라고 할 때, $\overline{OP}=3$, $\overline{PQ}=2$이다. 이 때, 동경 OP가 나타내는 각 θ에 대하여 $\sin\theta$의 값을 구하면?

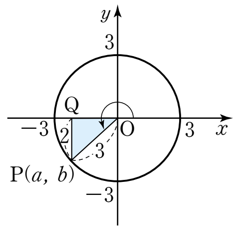
① $\frac{2}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

④ $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{2}{\sqrt{5}}$

착안점 (i) ∠POQ에 대한 삼각함수의 값을 구한다.

(ii) 제 3사분면에서 $\sin\theta<0$이다.

풀이



제 3사분면에서 $\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}=-\frac{2}{3}$

답 ②

검토 점 P가 제 3사분면 위의 점이므로 $a<0$, $b<0$이다. 또, $\overline{PQ}=2$이므로 $b=-2$

$\therefore \sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$

8 삼각함수의 값의 부호

θ가 제 4사분면의 각일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

$$|\sin\theta|+|\cos\theta|-|\cos\theta-\sin\theta|$$

착안점 제 4사분면에서 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$이다.

풀이 θ가 제 4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\cos\theta-\sin\theta>0$

$\therefore |\sin\theta|+|\cos\theta|-|\cos\theta-\sin\theta|$

$=-\sin\theta+\cos\theta-(\cos\theta-\sin\theta)$

$=\mathbf{0}$

2. 삼각함수의 성질과 그래프

1 삼각함수 사이의 관계

(1) 역수 관계

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta},\quad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\quad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

(2) 세 삼각비 사이의 관계

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

(3) 제곱 관계

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$
$$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$$
$$1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$$

보기 θ가 예각이고 $\sin\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

연구 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$에서

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

이 때, θ는 예각이므로 $\cos\theta>0$ $\quad\therefore \cos\theta=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

더 알아보자

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ …… ㉠ 에서

㉠의 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면

$\mathbf{1+\tan^2\theta=\sec^2\theta}$

㉠의 양변을 $\sin^2\theta$로 나누면

$\mathbf{\cot^2\theta+1=\operatorname{cosec}^2\theta}$

2 $2n\pi+\theta$의 삼각함수

n이 정수일 때,

$$\sin(2n\pi+\theta)=\mathbf{\sin\theta}$$
$$\cos(2n\pi+\theta)=\mathbf{\cos\theta}$$
$$\tan(2n\pi+\theta)=\mathbf{\tan\theta}$$

n이 정수일 때, 일반각 $360°\times n+\theta$와 각 θ를 나타내는 동경은 일치한다.

보기 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin 405°$ (2) $\cos 750°$ (3) $\tan(-300°)$ (4) $\sin\frac{13}{6}\pi$

연구 (1) $\sin 405°=\sin(360°+45°)=\sin 45°=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(2) $\cos 750°=\cos(360°\times2+30°)=\cos 30°=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) $-300°=360°\times(-1)+60°$이므로

$\tan(-300°)=\tan\{360°\times(-1)+60°\}=\tan 60°=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(4) $\sin\frac{13}{6}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ ← $\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\times\frac{180°}{\pi}=30°$

③ $-\theta$의 삼각함수

$\sin(-\theta)=\mathbf{-\sin\theta}$
$\cos(-\theta)=\mathbf{\cos\theta}$
$\tan(-\theta)=\mathbf{-\tan\theta}$

보기 다음 삼각함수의 값을 구하여라.
(1) $\sin(-30°)$ (2) $\cos(-30°)$ (3) $\tan(-30°)$

연구 $-30°$는 제 4사분면의 각이다. 제 4사분면의 각 θ에 대하여
$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$이다.

(1) $\sin(-30°)=-\sin 30°=\mathbf{-\frac{1}{2}}$ (2) $\cos(-30°)=\cos 30°=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) $\tan(-30°)=-\tan 30°=\mathbf{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

④ $\pi\pm\theta$의 삼각함수

$\sin(\pi+\theta)=\mathbf{-\sin\theta}$, $\sin(\pi-\theta)=\mathbf{\sin\theta}$
$\cos(\pi+\theta)=\mathbf{-\cos\theta}$, $\cos(\pi-\theta)=\mathbf{-\cos\theta}$
$\tan(\pi+\theta)=\mathbf{\tan\theta}$, $\tan(\pi-\theta)=\mathbf{-\tan\theta}$

보기 1. 다음 삼각함수의 값을 구하여라.
(1) $\sin 225°$ (2) $\cos 225°$ (3) $\tan 225°$

연구 $225°$는 제 3사분면의 각이다. 제 3사분면의 각 θ에 대하여
$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$이다.
(1) $\sin 225°=\sin(180°+45°)=-\sin 45°=\mathbf{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(2) $\cos 225°=\cos(180°+45°)=-\cos 45°=\mathbf{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(3) $\tan 225°=\tan(180°+45°)=\tan 45°=\mathbf{1}$

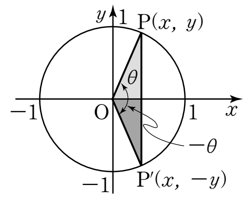
보기 2. 다음 삼각함수의 값을 구하여라.
(1) $\sin 150°$ (2) $\cos 150°$ (3) $\tan 150°$

연구 $150°$는 제 2사분면의 각이다. 제 2사분면의 각 θ에 대하여
$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$이다.
(1) $\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 30°=\mathbf{\frac{1}{2}}$

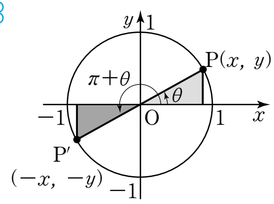
(2) $\cos 150°=\cos(180°-30°)=-\cos 30°=\mathbf{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) $\tan 150°=\tan(180°-30°)=-\tan 30°=\mathbf{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

더 알아보자



위의 그림에서
$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이므로
$\sin(-\theta)=-y=-\sin\theta$
$\cos(-\theta)=x=\cos\theta$
$\tan(-\theta)=\frac{-y}{x}=-\frac{y}{x}$
$=-\tan\theta$



위의 그림에서
$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이므로
$\sin(\pi+\theta)=-y=-\sin\theta$
$\cos(\pi+\theta)=-x=-\cos\theta$
$\tan(\pi+\theta)=\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x}$
$=\tan\theta$

5 $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\mathbf{\cos\theta},\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\mathbf{\cos\theta}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\mathbf{-\sin\theta},\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\mathbf{\sin\theta}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\mathbf{-\cot\theta},\qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\mathbf{\cot\theta}$$

보기 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin 150°$ (2) $\cos 150°$ (3) $\tan 150°$

연구 (1) $\sin 150°=\sin(90°+60°)=\cos 60°=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(2) $\cos 150°=\cos(90°+60°)=-\sin 60°=\mathbf{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) $\tan 150°=\tan(90°+60°)=-\cot 60°=\mathbf{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

6 $\frac{3}{2}\pi\pm\theta$의 삼각함수

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\mathbf{-\cos\theta},\qquad \sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\mathbf{-\cos\theta}$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\mathbf{\sin\theta},\qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\mathbf{-\sin\theta}$$

$$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\mathbf{-\cot\theta},\qquad \tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\mathbf{\cot\theta}$$

보기 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin 330°$ (2) $\cos 330°$ (3) $\tan 330°$

연구 $330°$는 제 4사분면의 각이다. 제 4사분면의 각 θ에 대하여
$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$이다.

(1) $\sin 330°=\sin(270°+60°)=-\cos 60°=\mathbf{-\frac{1}{2}}$

(2) $\cos 330°=\cos(270°+60°)=\sin 60°=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

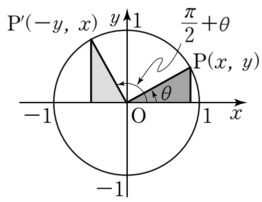
(3) $\tan 330°=\tan(270°+60°)=-\cot 60°=\mathbf{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

참고 $90°\times n\pm\theta$(단, n은 정수)의 삼각함수의 공식에서

① n이 짝수이면 **sin**은 **sin**, **cos**은 **cos**, **tan**는 **tan** 그대로이고
n이 홀수이면 **sin**은 **cos**, **cos**은 **sin**, **tan**는 **cot**로 바뀐다.

② 삼각함수의 부호 결정은 $90°\times n\pm\theta$를 나타내는 동경이 해당하는 사분면에서 원래 함수의 부호가 양이면 +, 음이면 −를 붙인다.
(단, θ는 어떤 각이든 항상 예각으로 간주한다.)

더 알아보자

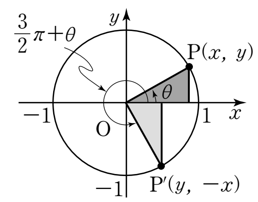


위의 그림에서
$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이므로

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=x=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-y=-\sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{x}{y}$
$=-\cot\theta$



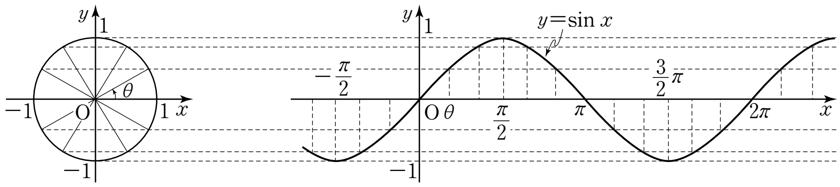
위의 그림에서
$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이므로

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-x$
$=-\cos\theta$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=y$
$=\sin\theta$

$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\frac{-x}{y}=-\frac{x}{y}$
$=-\cot\theta$

7 함수 $y=\sin\theta$의 그래프



(1) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(2) 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$이다. ← $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

(3) 주기가 2π인 주기함수이다.

(4) 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

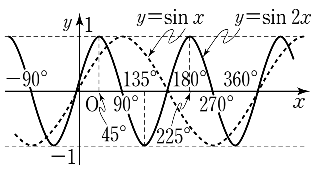
보기 $y=\sin 2x$의 그래프를 그려라.

연구 $0 \leq x \leq 180^\circ$에서 x가 변할 때 $\sin 2x$의 변화는 다음 표와 같다.

x	0	……	45°	……	90°	……	135°	……	180°
$\sin 2x$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

따라서, $y=\sin 2x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 좌우로 $\frac{1}{2}$배 만큼 축소시킨 것이다.

최대값 : 1, 최소값 : -1, 주기 : 180°



더 알아보자

모든 x에 대하여

$$f(x+p)=f(x)$$

를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 $f(x)$를 주기함수라 하고, 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라고 한다.

$\sin(x+2n\pi)=\sin x$

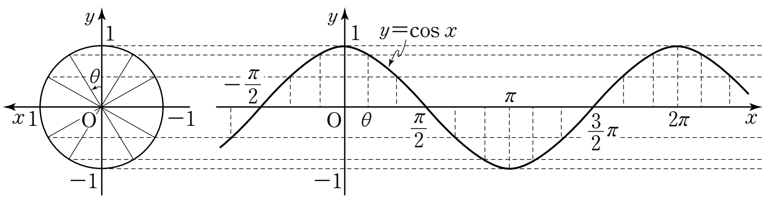
(단, n은 정수)

가 성립하고

$2n\pi$ 중에서 최소인 양수는 2π이므로

$y=\sin x$의 주기는 2π이다.

8 함수 $y=\cos\theta$의 그래프



(1) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(2) 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$이다. ← $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

(3) 주기가 2π인 주기함수이다.

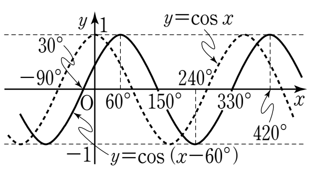
(4) 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

보기 함수 $y=\cos(x-60^\circ)$의 그래프를 그려라.

연구 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 60°만큼 평행이동시킨 것이다.

최대값 : 1, 최소값 : -1,

주기 : 360°



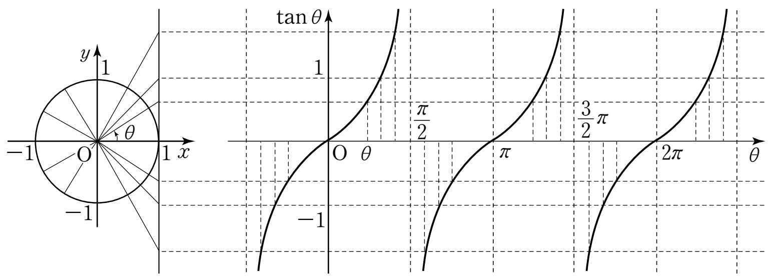
$\cos(x+2n\pi)=\cos x$

(단, n은 정수)

가 성립하고 $2n\pi$중에서 최소인 양수는 2π이므로

$y=\cos x$의 주기는 2π이다.

9 함수 $y=\tan\theta$의 그래프



(1) 정의역은 $n\pi+\frac{\pi}{2}$(단, n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이다.

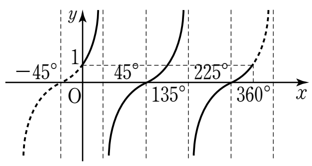
(2) 치역은 실수 전체의 집합이다.

(3) 주기가 π인 주기함수이고, 그래프는 원점에 대칭이다.

(4) 점근선은 직선 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$($n$은 정수)이다.

보기 함수 $y=\tan(x+45^\circ)$의 그래프를 그려라. (단, $0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ$)

연구 $y=\tan(x+45^\circ)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축 방향으로 -45°만큼 평행이동시킨 것이다.



9 삼각함수의 최대 · 최소값 및 주기

(1) $y=a\sin(bx+c)$ ⇨ 최대값 : $|a|$, 최소값 : $-|a|$, 주기 : $\frac{2\pi}{|b|}$

(2) $y=a\cos(bx+c)$ ⇨ 최대값 : $|a|$, 최소값 : $-|a|$, 주기 : $\frac{2\pi}{|b|}$

(3) $y=a\tan(bx+c)$ ⇨ 최대값, 최소값 : 없다.　주기 : $\frac{\pi}{|b|}$

보기 다음 함수의 주기를 구하여라.

(1) $y=\sin 2x$　　(2) $y=\cos\frac{1}{2}x$　　(3) $y=\tan 3x$

연구 삼각함수의 주기를 p라고 하면

(1) $\sin 2(x+p)=\sin 2x$에서 $2p=2\pi$, $p=\pi$

따라서, $y=\sin 2x$의 주기는 π

(2) $\cos\frac{1}{2}(x+p)=\cos\frac{1}{2}x$에서 $\frac{1}{2}p=2\pi$, $p=4\pi$

따라서, $y=\cos\frac{1}{2}x$의 주기는 4π

(3) $\tan 3(x+p)=\tan 3x$에서 $3p=\pi$, $p=\frac{\pi}{3}$

따라서, $y=\tan 3x$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$

더 알아보자

❀ $\tan(x+n\pi)=\tan x$ (단, n은 정수)
가 성립하고 $n\pi$중에서 최소인 양수는 π이므로
$y=\tan\theta$의 주기는 π이다.

❀ (1) $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

(2) $y=\cos\frac{1}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

(3) $y=\tan 3x$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$

교과서 원리 확인 학습

삼각함수 사이의 관계

1 θ가 예각이고 $\cos\theta=\frac{4}{5}$일 때, $\sin\theta$의 값을 구하여라.

Hint $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

이 때, θ는 예각이므로 $\sin\theta>0$ $\quad\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$

삼각함수 사이의 관계

2 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$일 때 $\sin\theta\cos\theta$의 값을 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 구하여라.

Hint $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\quad 1+2\sin\theta\cos\theta=2$

$2\sin\theta\cos\theta=1$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$2n\pi+\theta$의 삼각함수

3 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin 750°$ (2) $\cos 1110°$ (3) $\tan(-675°)$

Hint $\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$, $\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$, $\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$이다.

(1) $\sin 750°=\sin(360°\times 2+30°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$

(2) $\cos 1110°=\cos(360°\times 3+30°)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $-675°=360°\times(-2)+45°$이므로

$\tan(-675°)=\tan\{360°\times(-2)+45°\}=\tan 45°=1$

$-\theta$의 삼각함수

4 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (2) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (3) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Hint $\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

(3) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

정답 1. $\frac{3}{5}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) 1 4. (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $-\sqrt{3}$

$\pi\pm\theta$ 의 삼각함수

5 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin 210°$ (2) $\cos\frac{7}{6}\pi$ (3) $\tan(-135°)$

Hint (1) $\sin 210°=\sin(180°+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$

(2) $\cos\frac{7}{6}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan(-135°)=-\tan 135°=-\tan(180°-45°)=-(-\tan 45°)=\tan 45°=1$

$\frac{\pi}{2}\pm\theta$ 의 삼각함수

6 $\sin 40°=a$일 때, $\cos 130°$의 값을 a를 써서 나타내어라.

Hint $\cos 130°=\cos(90°+40°)=-\sin 40°=-a$

삼각함수의 값

7 $\sin\frac{20}{3}\pi$의 값을 구하여라.

Hint 절대값이 큰 각에 대한 삼각함수의 값을 구할 때에는 주어진 각을 $2n\pi+\theta$의 꼴로 변형한 다음 일반각 $2n\pi+\theta$와 각 θ를 나타내는 동경이 일치함을 이용한다.

$$\sin\frac{20}{3}\pi=\sin\left(6\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

삼각함수의 값

8 $\cos(-960°)$의 값을 구하여라.

Hint 절대값이 큰 각에 대한 삼각함수의 값을 구할 때는 주어진 각을 $360°\times n+\theta$의 꼴로 변형한 다음 일반각 $360°\times n+\theta$와 각 θ의 동경이 일치함을 이용한다.

$$\cos(-960°)=\cos\{360°\times(-3)+120°\}=\cos 120°=\cos(180°-60°)=-\cos 60°=-\frac{1}{2}$$

삼각함수의 성질

9 $\cos\theta-\cos(\pi-\theta)+\sin\theta+\sin(\pi+\theta)$를 간단히 하여라.

Hint θ를 예각으로 간주하면 $\pi-\theta$는 제 2사분면의 각이고, $\pi+\theta$는 제 3사분면의 각이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=\cos\theta-(-\cos\theta)+\sin\theta-\sin\theta=2\cos\theta$

정답 5. (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) 1 6. $-a$ 7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 8. $-\frac{1}{2}$ 9. $2\cos\theta$

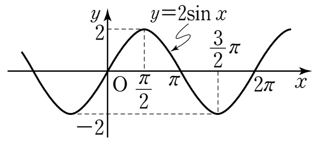
$y=\sin\theta$의 그래프

10

$y=2\sin x$의 최대값과 최소값 및 주기를 구하여라.

Hint $y=2\sin x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 y축 방향으로 2배 확대시킨 것이다.

$\therefore$ 최대값 : 2, 최소값 : -2, 주기 : 2π



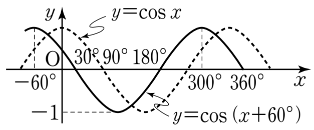
$y=\cos\theta$의 그래프

11

$y=\cos(x+60^\circ)$의 최대값과 최소값 및 주기를 구하여라.

Hint $y=\cos(x+60^\circ)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축 방향으로 -60°만큼 평행이동시킨 것이다.

$\therefore$ 최대값 : 1, 최소값 : -1, 주기 : 360°



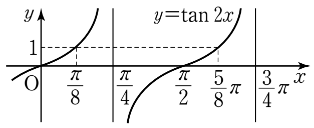
$y=\tan\theta$의 그래프

12

$y=\tan 2x$의 최대값과 최소값 및 주기를 구하여라.

Hint $y=\tan 2x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축 방향으로 $\frac{1}{2}$배 축소시킨 것이다.

따라서 최대값, 최소값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.



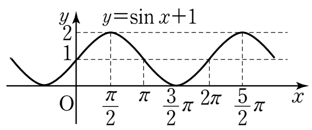
$y=\sin\theta$의 그래프

13

$y=\sin x+1$의 최대값과 최소값 및 주기를 구하여라.

Hint $y=\sin x+1$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프 y축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.

$\therefore$ 최대값 : 2, 최소값 : 0, 주기 : 2π



정답 **10.** 최대값 : 2, 최소값 : -2, 주기 : 2π **11.** 최대값 : 1, 최소값 : -1, 주기 : 360° **12.** 최대값, 최소값 : 없다, 주기 : $\frac{\pi}{2}$ **13.** 최대값 : 2, 최소값 : 0, 주기 : 2π

기초쌓기

1 삼각함수 사이의 관계

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구하여라.

착안점 조건식의 양변을 제곱하고
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

풀이 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$
$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$
$$-2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$$
$$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\mathbf{\frac{3}{8}}$$

2 삼각함수 사이의 관계

다음 식을 간단히 하여라.

$$(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta+\tan^2\theta$$

착안점 삼각함수의 제곱 관계

$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

를 이용한다.

풀이 $(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta+\tan^2\theta$
$=(1-\tan^2\theta)(1+\tan^2\theta)\cos^2\theta+\tan^2\theta$
$=(1-\tan^2\theta)\sec^2\theta\cos^2\theta+\tan^2\theta$

$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$이므로

$$\sec^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$\therefore\ \sec^2\theta\cos^2\theta=1$$
$$\therefore\ (\text{주어진 식})=1-\tan^2\theta+\tan^2\theta=\mathbf{1}$$

3 삼각함수의 성질

다음 식의 값을 구하여라.

$$\sin(180^\circ+\theta)\cos(90^\circ+\theta)-\sin(90^\circ-\theta)\cos(180^\circ-\theta)$$

착안점 $90^\circ\times n\pm\theta$의 삼각함수 공식에서
n이 짝수이면
sin은 sin, cos은 cos, tan는 tan 그대로이고
n이 홀수이면
sin은 cos, cos은 sin, tan는 cot로 바뀐다.

풀이 $\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta$
$\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$
$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$
$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$
$\therefore$ (주어진 식)
$=-\sin\theta\times(-\sin\theta)-\cos\theta\times(-\cos\theta)$
$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=\mathbf{1}$

4 삼각함수의 성질

$\sin 1380^\circ\times\tan(-510^\circ)$의 값을 구하여라.

착안점 절대값이 큰 각에 대한 삼각함수의 값을 구할 때는 주어진 각을 $360^\circ\times n+\theta$의 꼴로 변형하여 일반각 $360^\circ\times n+\theta$와 각 θ의 동경이 일치함을 이용한다.

풀이 $\sin 1380^\circ=\sin(360^\circ\times3+300^\circ)$
$=\sin 300^\circ$
$=\sin(270^\circ+30^\circ)$
$=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-510^\circ)=\tan\{360^\circ\times(-2)+210^\circ\}$
$=\tan 210^\circ$
$=\tan(180^\circ+30^\circ)$
$=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \sin 1380^\circ\times\tan(-510^\circ)$
$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\mathbf{-\frac{1}{2}}$

5 삼각함수의 그래프

삼각함수 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축 방향으로 얼마만큼 평행이동시킨 것인가?

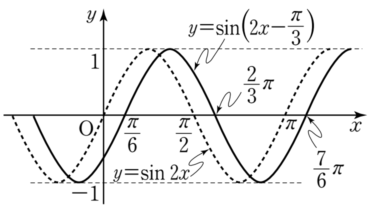
① $\frac{\pi}{3}$　　② $-\frac{\pi}{3}$　　③ $\frac{\pi}{6}$

④ $-\frac{\pi}{6}$　　⑤ $\frac{2\pi}{3}$

착안점 $y=\sin\{a(x-m)\}+n$의 그래프는 $y=\sin ax$의 그래프를 x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동시킨 것이다.

풀이 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$이므로

$y=\sin 2x$의 그래프를 x축 방향으로 $\frac{\pi}{6}$ 만큼 평행이동시킨 것이다.



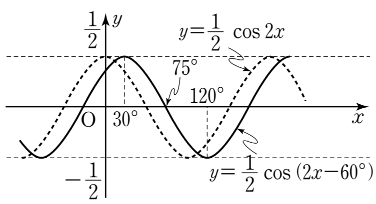
답 ③

6 삼각함수의 그래프

$y=\frac{1}{2}\cos(2x-60^\circ)$의 그래프를 그리고, 최대값, 최소값 및 주기를 구하여라.

착안점 $y=a\cos(bx+c)$의 그래프에서 최대값은 $|a|$, 최소값은 $-|a|$이고 주기는 $\frac{360^\circ}{|b|}$이다.

풀이 $y=\frac{1}{2}\cos 2(x-30^\circ)$의 그래프는 $y=\frac{1}{2}\cos 2x$의 그래프를 x축 방향으로 30°만큼 평행이동시킨 것이다.



$\therefore$ 최대값 : $\mathbf{\frac{1}{2}}$, 최대값 : $\mathbf{-\frac{1}{2}}$

주기 : $\frac{360^\circ}{2}=\mathbf{180^\circ}$

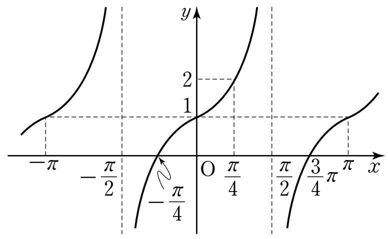
7 삼각함수의 그래프

다음 삼각함수의 그래프를 그리고, 최대값, 최소값 및 주기를 구하여라.

$$y=\tan x+1$$

착안점 $y=\tan(x-m)+n$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축 방향으로 m, y축 방향으로 n만큼 평행이동시킨 것이다.

풀이 $y=\tan x+1$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.



최대값, 최소값은 없고 주기는 π이다.

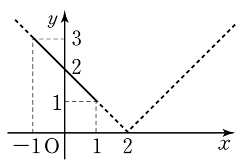
8 삼각함수의 최대 · 최소

$y=|\sin x-2|$의 최대값과 최소값을 구하여라.

착안점 $\sin x=t$로 치환하면 $-1\leq\sin x\leq 1$이므로 $-1\leq t\leq 1$이다.

풀이 $y=|\sin x-2|$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\leq t\leq 1$ 이고 $y=|t-2|$이다.

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최대값 3을 갖고, $t=1$일 때 최소값 1을 갖는다.



최대값 : **3**, 최소값 : **1**

검토 $-1\leq\sin x\leq 1$

$-3\leq\sin x-2\leq -1$

$\therefore 1\leq|\sin x-2|\leq 3$

해 | 설 | 편　3. 삼각방정식과 삼각부등식

❶ 삼각방정식의 풀이

(1) 그래프의 이용

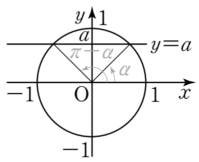
① 주어진 방정식을 $\sin x=a$ (또는 $\cos x=a$, $\tan x=a$)로 고친다.

② $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$, $y=\tan x$)와 $y=a$의 그래프를 그린다.

③ 주어진 범위 내에서 교점의 x좌표를 구한다.

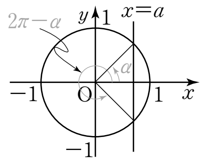
(2) 단위원의 이용$(0\leqq x<2\pi)$

① $\sin x=a$



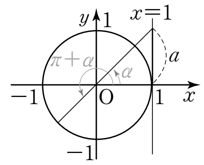
$x=\alpha,\ \pi-\alpha$

② $\cos x=a$



$x=\alpha,\ 2\pi-\alpha$

③ $\tan x=a$

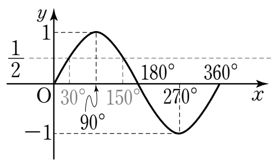


$x=\alpha,\ \pi+\alpha$

보기 1. 삼각함수 $y=\sin x$의 그래프를 이용하여 $0^\circ\leqq x\leqq 360^\circ$의 범위에서 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해를 구하여라.

연구 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$과의 교점의 x좌표의 값을 구하면

$\boldsymbol{x=30^\circ}$ **또는** $\boldsymbol{x=150^\circ}$



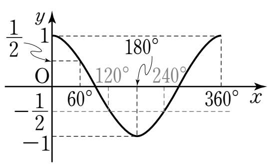
검토 $\sin x>0$인 경우는 x가 제 1, 2사분면의 각일 때이다. $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$이므로 제 1사분면의 각 $x=30^\circ$이고 제 2사분면의 각 x는 그래프의 대칭성을 이용하면 $180^\circ-30^\circ$, 즉 150°임을 알 수 있다.

보기 2. 방정식 $2\cos x+1=0$을 풀어라.(단, $0^\circ\leqq x\leqq 360^\circ$)

연구 $2\cos x+1=0$에서 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$과의 교점의 x좌표의 값을 구하면

$\boldsymbol{x=120^\circ}$ **또는** $\boldsymbol{x=240^\circ}$



검토 $\cos x<0$인 경우는 x가 제 2, 3사분면의 각일 때이다. $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$이므로 그래프의 대칭성을 이용하면 제 2사분면의 각 x는 $180^\circ-60^\circ$, 즉 120°이고 제 3사분면의 각 x는 $180^\circ+60^\circ$, 즉 240°임을 알 수 있다.

더 알아보자

❀ 삼각함수의 각 또는 각을 나타내는 식 중에 미지수를 포함하는 방정식을 삼각방정식이라 하고 그 해를 구하는 것을 삼각방정식을 푼다라고 한다.

❷ 삼각부등식의 풀이

(1) 그래프의 이용

① 주어진 부등식을 $\sin x > a$ (또는 $\cos x > a$, $\tan x > a$)로 고친다.

② $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$, $y=\tan x$)와 $y=a$의 그래프를 그린다.

③ 주어진 범위 내에서 교점의 x좌표를 구한다.

④ $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$, $y=\tan x$)의 그래프가 직선 $y=a$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구한다.

(2) 단위원의 이용

① $\sin x > k$일 때 단위원과 $y=k$의 그래프에서 원이 $y=k$보다 위쪽에 있는 x의 범위를 구하고, $\sin x < k$일 때 원이 $y=k$보다 아래쪽에 있는 x의 범위를 구한다.

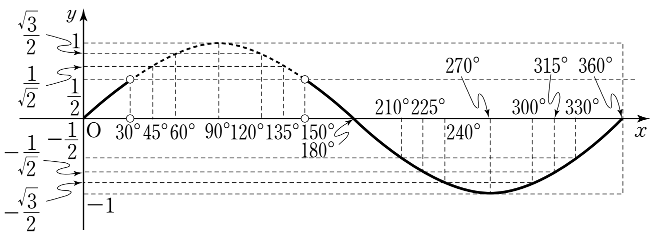
② $\cos x > k$일 때 단위원과 $x=k$의 그래프에서 원이 $x=k$보다 오른쪽에 있는 x의 범위를 구하고, $\cos x < k$일 때 원이 $x=k$보다 왼쪽에 있는 x의 범위를 구한다.

더 알아보자

삼각함수의 각 또는 각을 나타내는 식 중에 미지수를 포함하는 부등식을 삼각부등식이라 하고, 그 해를 구하는 것을 삼각부등식을 푼다라고 한다.

보기 1. 삼각함수 $y=\sin x$의 그래프를 이용하여 $0° \leqq x \leqq 360°$의 범위에서 삼각부등식 $\sin x < \frac{1}{2}$을 풀어라.

연구



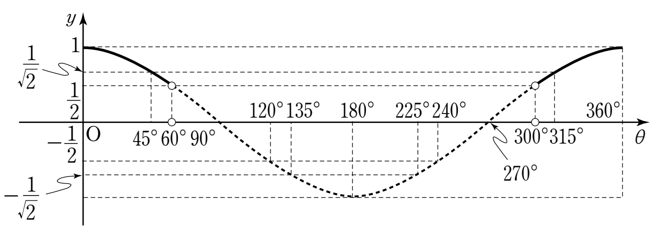
$y=\sin x$의 그래프에서 $y < \frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 범위를 찾는다.

$\sin x = \frac{1}{2}\,(0° \leqq x \leqq 360°)$을 만족하는 x의 값을 구하면 $x=30°$, $150°$이다.

$\therefore$ **$0° \leqq x < 30°$ 또는 $150° < x \leqq 360°$**

보기 2. $0° \leqq \theta \leqq 360°$일 때, 부등식 $\cos\theta > \frac{1}{2}$을 풀어라.

연구



$y=\cos\theta$의 그래프에서 $y > \frac{1}{2}$을 만족시키는 θ의 범위를 찾는다.

$\cos\theta = \frac{1}{2}\,(0° \leqq \theta \leqq 360°)$을 만족하는 θ의 값을 구하면 $\theta=60°$, $300°$이다.

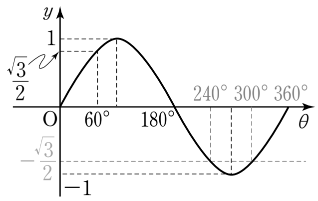
$\therefore$ **$0° \leqq \theta < 60°$ 또는 $300° < \theta \leqq 360°$**

교과서 원리 확인 학습

$\sin\theta=a$ 의 해

1 $2\sin\theta=-\sqrt{3}$을 만족하는 θ의 값을 구하여라. $(0°\leq\theta<360°)$

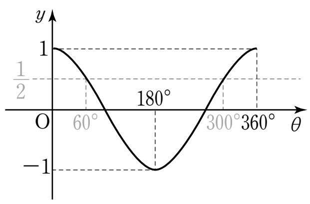
Hint $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 에서 $y=\sin\theta$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 과의 교점의 θ좌표의 값을 구하면 된다.
$\sin\theta<0$인 경우는 θ가 제 3, 4사분면의 각일 때이므로
$\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 에서 그래프의 대칭성을 이용하면
제 3사분면의 각 θ는 $180°+60°$, 즉 $240°$이고
제 4사분면의 각 θ는 $360°-60°$, 즉 $300°$이다.



$\cos\theta=a$ 의 해

2 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$을 만족하는 θ의 값을 구하여라. (단, $0°\leq\theta<360°$)

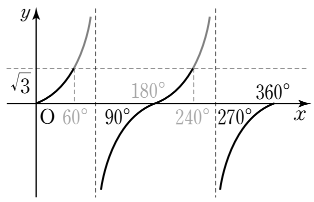
Hint $y=\cos\theta$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2}$과의 교점의 θ 좌표의 값을 구하면 된다.
$\cos\theta>0$인 경우는 θ가 제 1, 4사분면의 각일 때이므로
$\cos 60°=\dfrac{1}{2}$에서 그래프의 대칭성을 이용하면 제 1사분면의 각 θ는 $60°$이고 제 4사분면의 각 θ는 $360°-60°$, 즉 $300°$이다.



$\tan\theta=a$ 의 해

3 삼각방정식 $\tan\theta-\sqrt{3}=0$을 풀어라. (단, $0°\leq\theta<360°$)

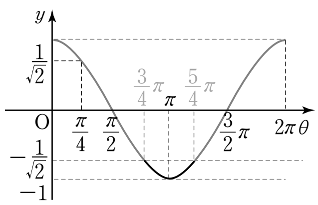
Hint $\tan\theta-\sqrt{3}=0$에서 $\tan\theta=\sqrt{3}$ 이므로
$y=\tan\theta$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 θ 좌표의 값을 구하면 된다.
$\tan\theta>0$인 경우는 θ가 제 1, 3사분면의 각일 때이므로
$\tan 60°=\sqrt{3}$에서 그래프의 대칭성을 이용하면
제 1사분면의 각 θ는 $60°$이고 제 3사분면의 각 θ는 $180°+60°$, 즉 $240°$이다.



$\cos\theta=a$ 의 해

4 $0\leq\theta<2\pi$ 일 때, 방정식 $\sqrt{2}\cos\theta+1=0$을 풀어라.

Hint $\sqrt{2}\cos\theta+1=0$에서 $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로
$y=\cos\theta$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 과의 교점의 θ 좌표의 값을 구하면 된다.
$\cos\theta<0$인 경우는 θ가 제 2, 3사분면의 각일 때이므로
$\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$에서 그래프의 대칭성을 이용하면 제 2사분면의 각 θ는 $\pi-\dfrac{\pi}{4}$, 즉 $\dfrac{3}{4}\pi$이고
제 3사분면의 각 θ는 $\pi+\dfrac{\pi}{4}$, 즉 $\dfrac{5}{4}\pi$이다.



정답 1. $\theta=240°$, 또는 $300°$ 2. $\theta=60°$, 또는 $300°$ 3. $\theta=60°$, 또는 $240°$ 4. $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ 또는 $\dfrac{5}{4}\pi$

$\sin\theta<a$ 의 해

5

$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$일 때, 부등식 $2\sin\theta < -\sqrt{3}$을 풀어라.

Hint $2\sin\theta < -\sqrt{3}$에서 $\sin\theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

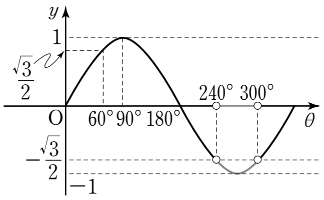
$y=\sin\theta$의 그래프에서 $y<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 을 만족시키는

θ의 범위를 찾는다.

$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$을 만족하는

θ의 값을 구하면 $\theta=240^\circ$, 300°이다.

$\therefore 240^\circ < \theta < 300^\circ$



$\cos\theta \leqq a$ 의 해

6

$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$일 때, 부등식 $\cos\theta \leqq \frac{1}{2}$을 풀어라.

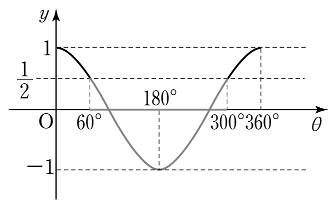
Hint $y=\cos\theta$의 그래프에서 $y \leqq \frac{1}{2}$를 만족시키는

θ의 범위를 찾는다.

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ $(0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$에서

$\theta = 60^\circ$, 300°이다.

$\therefore 60^\circ \leqq \theta \leqq 300^\circ$



$\tan\theta > a$ 의 해

7

$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$일 때, 부등식 $\tan\theta > \sqrt{3}$을 풀어라.

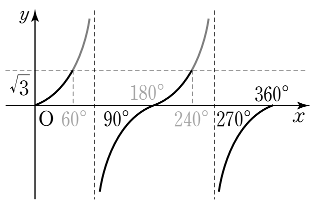
Hint $y=\tan\theta$의 그래프에서

$\tan\theta = \sqrt{3}$ $(0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$를 만족하는 θ의 값을 구하면

$\theta = 60^\circ$, 240°이다.

$y > \sqrt{3}$를 만족시키는 θ의 범위를 찾는다.

$\therefore 60^\circ < \theta < 90^\circ$ 또는 $240^\circ < \theta < 270^\circ$



$\cos\theta > a$ 의 해

8

$0 \leqq \theta < 2\pi$일 때, 부등식 $\sqrt{2}\cos\theta + 1 > 0$을 풀어라.

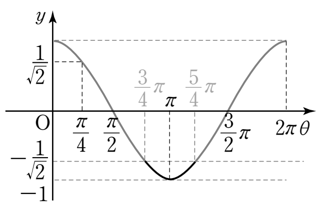
Hint $\sqrt{2}\cos\theta + 1 > 0$에서 $\sqrt{2}\cos\theta > -1$ $\quad \therefore \cos\theta > -\frac{1}{\sqrt{2}}$

따라서 $y=\cos\theta$의 그래프에서

$y > -\frac{1}{\sqrt{2}}$를 만족시키는 θ의 범위를 찾는다.

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$에서 $\theta = \frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$이다.

$\therefore 0 \leqq \theta < \frac{3}{4}\pi$ 또는 $\frac{5}{4}\pi < \theta < 2\pi$



정답 5. $240^\circ < \theta < 300^\circ$ 6. $60^\circ \leqq \theta \leqq 300^\circ$ 7. $60^\circ < \theta < 90^\circ$ 또는 $240^\circ < \theta < 270^\circ$ 8. $0 \leqq \theta < \frac{3}{4}\pi$ 또는 $\frac{5}{4}\pi < \theta < 2\pi$

기초 쌓기

1 삼각방정식

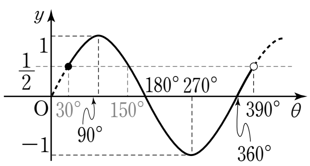
$0 \le x < 360^\circ$일 때, $\sin(x+30^\circ)=\frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값을 구하여라.

착안점 $x+30^\circ=\theta$로 치환하고 $30^\circ \le \theta < 390^\circ$인 범위에서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$인 θ를 구한다.

풀이 $x+30^\circ=\theta$라 하면

$0^\circ \le x < 360^\circ$이므로 $30^\circ \le \theta < 390^\circ$이다.

따라서, $\sin\theta=\frac{1}{2}\,(30^\circ \le \theta < 390^\circ)$를 만족하는 θ를 구하면



$\theta=30^\circ$ 또는 $\theta=150^\circ$

따라서, $x+30^\circ=30^\circ$에서 $x=0^\circ$,

$x+30^\circ=150^\circ$에서 $x=120^\circ$이므로

$\boldsymbol{x=0^\circ}$ **또는** $\boldsymbol{x=120^\circ}$

2 삼각방정식

$0 < x < \frac{\pi}{2}$일 때, 방정식 $2\cos^2 x=\sin x+1$을 풀어라.

착안점 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$에서 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$임을 이용하여 한 종류의 삼각함수로 통일시킨다.

풀이 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로 주어진 방정식은

$$2(1-\sin^2 x)=\sin x+1$$
$$2\sin^2 x+\sin x-1=0$$
$$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$이므로 $\sin x > 0$

따라서, $\sin x=\frac{1}{2}$이므로

$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{6}}$

3 삼각부등식

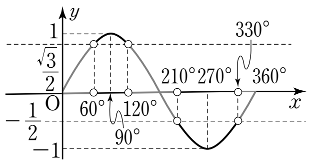
$0^\circ \le x \le 360^\circ$일 때, 부등식

$$-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

을 풀어라.

착안점 삼각부등식을 풀 때에는 삼각함수의 그래프를 그려서 해를 찾는다.

풀이 $y=\sin x$의 그래프를 그려서 $-\frac{1}{2} < y < \frac{\sqrt{3}}{2}$을 만족시키는 x의 범위를 찾는다.



$\sin x=-\frac{1}{2}$에서 $x=210^\circ$, 330°이고

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $x=60^\circ$, 120°이다.

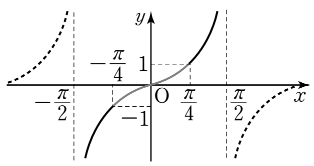
$\therefore$ $\boldsymbol{0^\circ \le x < 60^\circ}$ **또는** $\boldsymbol{120^\circ < x < 210^\circ}$ **또는** $\boldsymbol{330^\circ < x \le 360^\circ}$

4 삼각부등식

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$일 때, 부등식 $-1 \le \tan x \le 1$을 풀어라.

착안점 $y=\tan x$의 그래프를 그려서 해를 찾는다.

풀이 $y=\tan x$의 그래프를 그려서 $-1 \le y \le 1$를 만족하는 x의 범위를 찾는다.



$\tan x=-1$을 만족하는 $x=-\frac{\pi}{4}$이고,

$\tan x=1$을 만족하는 $x=\frac{\pi}{4}$이다.

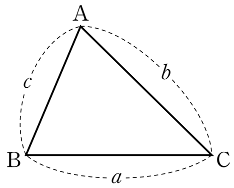
$\therefore$ $\boldsymbol{-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}}$

해 | 설 | 편

4. 삼각함수의 응용

❶ 삼각형의 성립조건

삼각형 ABC에서 세각 ∠A, ∠B, ∠C의 크기를 각각 A, B, C로 나타내고, 이들의 대변의 길이를 a, b, c로 나타낼 때 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$를 삼각형의 **6요소**라 한다.



(1) 각의 조건 : ① $A>0$, $B>0$, $C>0$
② $A+B+C=180°$

(2) 변의 조건 : ① $a>0$, $b>0$, $c>0$
② $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$
③ 최대각과 마주보는 변의 길이가 최대이고, 최소각과 마주보는 변의 길이가 최소이다.

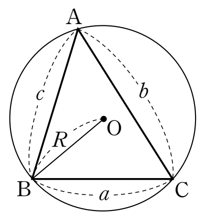
보기 3, 5, x가 삼각형의 세 변의 길이가 되도록 하는 x의 값의 범위를 구하여라.

연구 삼각형이 성립되기 위해서는 $3+5>x$, $5+x>3$, $x+3>5$이어야 한다.
따라서, $x<8$, $x>-2$, $x>2$이므로 $\boldsymbol{2<x<8}$

❷ 사인법칙

△ABC에서 세 각 A, B, C와 세 변의 길이 a, b, c, 외접원의 반지름의 길이 R 사이에 성립하는 다음 관계를 사인법칙이라 한다.

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}}=\frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}}=\frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}}=\boldsymbol{2R}$$



보기 △ABC에서 $A=60°$, $B=30°$이고, $b=2$일 때, a와 외접원의 반지름의 길이 R를 구하여라.

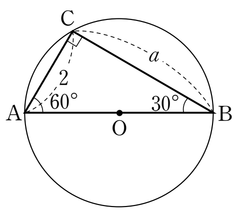
연구 사인법칙을 활용한다.

$$\frac{a}{\sin 60°}=\frac{2}{\sin 30°}=2R\text{에서}$$

$$a=\frac{2}{\sin 30°}\cdot\sin 60°=\frac{2}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

또, $\dfrac{2}{\sin 30°}=2R$에서 $R=\dfrac{1}{\sin 30°}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore\ \boldsymbol{a=2\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{R=2}$



더 알아보자

삼각형이 되는 조건
두 변의 길이의 합이 다른 한 변의 길이보다 커야 한다.

사인법칙의 변형
① $a=2R\sin A$
$b=2R\sin B$
$c=2R\sin C$
② $\sin A=\dfrac{a}{2R}$
$\sin B=\dfrac{b}{2R}$
$\sin C=\dfrac{c}{2R}$
③ $a:b:c$
$=\sin A:\sin B:\sin C$

사인법칙의 적용
① 한 변의 길이와 두 각의 크기를 알 때, 다른 변의 길이를 구하는 경우
② 두 변의 길이와 그 끼인 각이 아닌 한 각의 크기를 알 때, 다른 각의 크기를 구하는 경우에 사용된다.

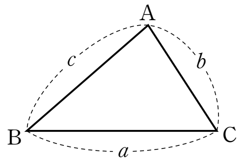
③ 제일코사인법칙

$\triangle$ABC에서 변의 길이와 각의 코사인 값에 대하여 성립하는 다음 관계를 제일코사인법칙이라 한다.

$\boldsymbol{a=b\cos C+c\cos B}$

$\boldsymbol{b=c\cos A+a\cos C}$

$\boldsymbol{c=a\cos B+b\cos A}$

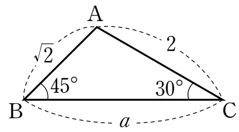


보기 $\triangle$ABC에서 $B=45°$, $C=30°$, $b=2$, $c=\sqrt{2}$일 때, a를 구하여라.

연구 $a=b\cos C+c\cos B$에서

$a=2\cdot\cos 30°+\sqrt{2}\cdot\cos 45°$

$=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\sqrt{3}+1}$



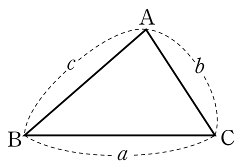
④ 제이코사인법칙

$\triangle$ABC에서 변의 길이와 각의 코사인 값에 대하여 성립하는 다음 관계를 제이코사인법칙이라 한다.

$\boldsymbol{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A}$

$\boldsymbol{b^2=c^2+a^2-2ca\cos B}$

$\boldsymbol{c^2=a^2+b^2-2ab\cos C}$



보기 1. $\triangle$ABC에서 $b=3$, $c=6$, $A=60°$일 때, a를 구하여라.

연구 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$에서

$a^2=3^2+6^2-2\cdot3\cdot6\cos 60°=9+36-36\cdot\dfrac{1}{2}=27 \quad \therefore a=\pm3\sqrt{3}$

$a>0$이므로 $\boldsymbol{a=3\sqrt{3}}$

보기 2. $\triangle$ABC에서 $a=7$, $b=8$, $c=13$일 때, C를 구하여라.

연구 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$에서

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{7^2+8^2-13^2}{2\cdot7\cdot8}=-\dfrac{1}{2} \quad \therefore C=120°,\ 240°$

$0°<C<180°$이므로 $\boldsymbol{C=120°}$

더 알아보자

제일코사인법칙의 적용

제일코사인법칙은 $\triangle$ABC에서 두 내각의 크기와 두 변의 길이를 알 때, 나머지 한 변의 길이를 구하는 경우에 사용된다.

제이코사인법칙의 변형

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

제이코사인법칙의 적용

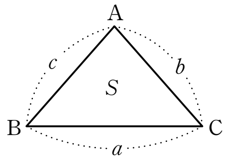
① 두 변의 길이와 그 끼인 각을 알 때, 나머지 한 변의 길이를 구하는 경우에 사용된다.

② 세 변의 길이를 알 때, $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$의 값을 구하는 경우에 사용된다.

5 두 변과 그 끼인각을 알 때의 삼각형의 넓이

△ABC의 넓이를 S라고 할 때,

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B}$$



보기 $a=4$, $b=6$, $C=45°$인 △ABC의 넓이를 구하여라.

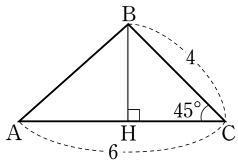
연구 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot4\cdot6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{6\sqrt{2}}$

검토 △ABC에서 꼭지점 B에서 대변 AC에 내린 수선의 발을 H로 놓으면

직각삼각형 BCH에서 $\sin C=\frac{\overline{BH}}{\overline{BC}}$이므로

$\sin 45°=\frac{\overline{BH}}{4}$ $\quad\therefore \overline{BH}=4\sin45°$

$\therefore S=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times6\times4\sin45°=\boldsymbol{6\sqrt{2}}$



6 세 변의 길이를 알 때의 삼각형의 넓이

세 변의 길이가 a, b, c인 △ABC의 넓이 S는 다음과 같이 구할 수 있다.

(1) 사인법칙과 코사인법칙을 이용한다.

① 제이코사인법칙으로부터 한 각에 대한 코사인($\cos A$)값을 구하고

② $\cos^2 A+\sin^2 A=1$임을 이용하여 $\sin A$의 값을 구한다.

③ $S=\frac{1}{2}bc\sin A$를 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

(2) 헤론의 공식을 이용한다.

$$\boldsymbol{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\ (\text{단, } 2s=a+b+c)$$

보기 세 변의 길이가 7, 8, 9 인 삼각형의 넓이를 구하여라.

연구 $2s=7+8+9$에서 $s=12$

$\therefore S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=\boldsymbol{12\sqrt{5}}$

더 알아보자

△ABC의 넓이 S를 다음과 같이 구할 수도 있다.

① $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

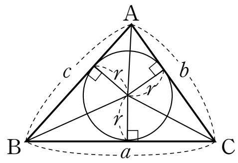
$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\boldsymbol{\frac{abc}{4R}}$

② $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$이므로

$S=\frac{1}{2}ab\sin C$

$=\boldsymbol{2R^2\sin A\sin B\sin C}$

③ △ABC의 내접원의 반지름의 길이가 r일 때, 다음 그림에서 보면



$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)r$

여기서 $2s=a+b+c$로 놓으면

$S=\boldsymbol{rs}$

교과서 원리 확인 학습

삼각형의 성립조건

1 △ABC에서 $A=40°$, $B=60°$일 때 C의 값을 구하여라.

Hint △ABC에서 $A+B+C=180°$이다. $40°+60°+C=180°$에서 $C=80°$

삼각형의 성립조건

2 4, 7, x가 삼각형의 세 변의 길이가 되도록 하는 x의 값의 범위를 구하여라.

Hint 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.
즉, $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$이다.
따라서, 4, 7, x가 삼각형의 세 변의 길이가 되려면
$4+7>x$, $7+x>4$, $x+4>7$이어야 한다. $\therefore 3<x<11$

사인법칙

3 △ABC의 외접원의 반지름의 길이가 5이고 $A=30°$일 때, 각 A에 대응하는 변의 길이를 구하여라.

Hint △ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$R=5$, $A=30°$이므로 $\frac{a}{\sin A}=2R$에서 $\frac{a}{\sin 30°}=2\times 5$

$$\therefore a=10\sin 30°=10\times\frac{1}{2}=5$$

사인법칙

4 △ABC에서 $a=5$, $A=30°$, $B=45°$일 때, b의 값을 구하여라.

Hint 사인법칙 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$에서 $\frac{5}{\sin 30°}=\frac{b}{\sin 45°}$

$$\therefore b=\frac{5}{\sin 30°}\times\sin 45°=\frac{5}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$$

제일 코사인 법칙

5 △ABC에서 $B=30°$, $C=60°$, $b=1$, $c=\sqrt{3}$일 때, a의 값을 구하여라.

Hint 제일코사인법칙 $a=b\cos C+c\cos B$에서

$$a=1\cdot\cos 60°+\sqrt{3}\cdot\cos 30°=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2$$

정답 1. 80° 2. $3<x<11$ 3. 5 4. $5\sqrt{2}$ 5. 2

제이 코사인 법칙 **6**

△ABC에서 $b=5$, $c=8$, $A=60°$일 때, a의 값을 구하여라.

Hint 제이코사인법칙 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$에서

$$a^2=5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cos60°=25+64-80\cdot\frac{1}{2}=25+64-40=49$$

즉, $a^2=49$에서 $a=7$ ⬅ $a>0$

제이 코사인 법칙 **7**

△ABC에서 $a=3, b=4, c=5$일 때, 최대각의 크기를 구하여라.

Hint 최대변에 대응하는 각이 최대각이고 최소변에 대응하는 각이 최소각이다.

따라서 C가 최대각이다. 제이코사인법칙에 의해

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3^2+4^2-5^2}{2\cdot3\cdot4}=0 \qquad \therefore C=90°$$

삼각형의 넓이 **8**

△ABC에서 $a=10$, $b=6$, $C=30°$일 때, 삼각형의 넓이를 구하여라.

Hint a, b를 두 변으로 하고 그 끼인각이 θ인 삼각형의 넓이는 $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$이다.

$$\therefore S=\frac{1}{2}\times6\times10\times\sin30°=\frac{1}{2}\times6\times10\times\frac{1}{2}=15$$

삼각형의 넓이 **9**

한 변의 길이가 4인 정삼각형의 넓이 S를 구하여라.

Hint 정삼각형에서 한 내각의 크기는 60°이므로

$$S=\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin60°=\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$$

삼각형의 넓이 **10**

세 변의 길이가 5, 7, 8 인 삼각형의 넓이를 구하여라.

Hint $a=5$, $b=7$, $c=8$로 놓으면

$2s=a+b+c$ 에서 $2s=5+7+8=20$ $\therefore s=10$

헤론의 공식에 의하여

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)}$$
$$=\sqrt{10\cdot5\cdot3\cdot2}=10\sqrt{3}$$

정답 6. 7 7. 90° 8. 15 9. $4\sqrt{3}$ 10. $10\sqrt{3}$

기초쌓기

1 사인법칙

△ABC에서 $a=3$, $b=3\sqrt{3}$, $A=30°$이다. 이 삼각형이 둔각삼각형일 때, B의 값을 구하면?

① 30° ② 60° ③ 90°
④ 120° ⑤ 150°

착안점 두 변과 그 끼인각이 아닌 한 각이 주어진 경우이므로 사인법칙

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

를 이용한다.

풀이 사인법칙에 의해 $\dfrac{3}{\sin 30°}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin B}$

$$\sin B=3\sqrt{3}\times\frac{\sin 30°}{3}=3\sqrt{3}\times\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$에서 $B=60°$ 또는 $B=120°$

이 때, △ABC가 둔각삼각형이므로 $B=120°$

답 ④

2 제이코사인 법칙

△ABC에서 $a:b:c=2:3:4$일 때, $\cos A$의 값을 구하여라.

착안점 $a=2k$, $b=3k$, $c=4k$로 놓고

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$임을 이용한다.

풀이 $a:b:c=2:3:4$이므로

$a=2k$, $b=3k$, $c=4k$ (단, $k\neq0$)라 하면

제이코사인법칙에 의해

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(3k)^2+(4k)^2-(2k)^2}{2\cdot3k\cdot4k}=\frac{21k^2}{24k^2}=\mathbf{\frac{7}{8}}$$

3 삼각형의 해법

△ABC의 세 변 a, b, c에 대하여 $A=90°$, $B=30°$, $c=\sqrt{3}$일 때, a, b의 길이를 구하여라.

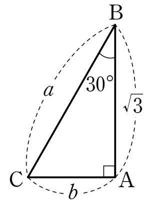
착안점 한 변과 두 각이 주어질 때

$A+B+C=180°$로부터 나머지 한 각을 구한다.

이 때, 나머지 요소는 사인법칙 또는 제일코사인법칙(특수각이 아니어서 사인값을 구할 수 없을 때)을 이용하여 구한다.

풀이 $A+B+C=180°$에서

$C=60°$



$\dfrac{b}{\sin 30°}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60°}$에서

$$b=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60°}\cdot\sin 30°=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$\therefore$ $\mathbf{b=1}$

또, △ABC는 $A=90°$인 직각삼각형이므로

$a^2=b^2+c^2=1^2+(\sqrt{3})^2=4$

$\therefore$ $\mathbf{a=2}$ ⬅ $a>0$

4 삼각형의 해법

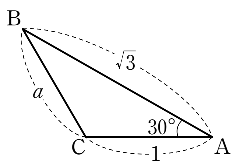
△ABC의 세 변 a, b, c에 대하여 $b=1$, $c=\sqrt{3}$, $A=30°$일 때, a의 길이와 B, C의 크기를 구하여라.

착안점 두 변과 그 끼인각이 주어질 때, 제이코사인법칙을 이용하여 나머지 한 변을 구하고, 나머지 두 각은 사인법칙을 이용하여 구한다.

풀이 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=1^2+\sqrt{3}^2-2\cdot1\cdot\sqrt{3}\cos 30°=1$

즉, $a^2=1$에서 $\mathbf{a=1}$



$\dfrac{1}{\sin 30°}=\dfrac{1}{\sin B}$

$\mathbf{B=30°}$이고,

$A+B+C=180°$에서

$\mathbf{C=120°}$

5 삼각형의 해법

$\triangle$ABC에서 세 변의 길이가 $a=\sqrt{2}$, $b=2$, $c=1+\sqrt{3}$일 때, A, B, C의 크기를 구하여라.

착안점 세 변의 길이가 주어질 때, 제이코사인법칙을 이용하여 두 각을 구하고, $A+B+C=180°$임을 이용하여 나머지 한 각을 구한다.

풀이 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\dfrac{2^2+(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot (1+\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ $\boldsymbol{A=30°}$

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $\boldsymbol{B=45°}$

$A+B+C=180°$이므로

$C=180°-(30°+45°)=105°$

$\therefore$ $\boldsymbol{C=105°}$

6 삼각형의 넓이

$\triangle$ABC에서 $A=30°$, $a=2$, $c=4$일 때, $\triangle$ABC의 넓이를 구하여라.

착안점 a, b를 두 변으로 하고 그 끼인각이 θ인 삼각형의 넓이는 $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$이다.

풀이 사인법칙에 의해 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로

$\dfrac{2}{\sin 30°}=\dfrac{4}{\sin C}$

$\sin C=2\sin 30°=2\times\dfrac{1}{2}=1$ $\quad\therefore$ $C=90°$

$A+B+C=180°$에서

$B=180°-(30°+90°)=60°$

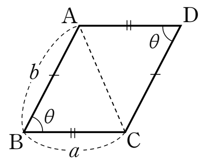
$\therefore$ $S=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot\sin 60°$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

7 평행사변형의 넓이

이웃하는 두 변의 길이가 각각 4, 6이고 그 끼인각의 크기가 60°인 평행사변형의 넓이를 구하여라.

착안점 평행사변형 ABCD에서



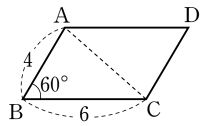
$\triangle$ABC$=\triangle$ADC

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$S=2\triangle\mathrm{ABC}=2\cdot\frac{1}{2}ab\sin\theta=ab\sin\theta$

즉, $S=ab\sin\theta$이다.

풀이 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서



$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ADC}$

$=2\triangle\mathrm{ABC}$

$=2\times\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin 60°$

$=4\times 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{12\sqrt{3}}$

8 삼각형의 모양

$\triangle$ABC에 대하여

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$$

가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 모양인지 말하여라.

착안점 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$에서

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

임을 이용한다.

풀이 사인법칙에 의해

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

이다. 이것을 주어진 식에 대입하면

$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$에서

$\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2=\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2$

$\therefore$ $a^2=b^2+c^2$

따라서, **$\angle$A가 직각인 직각삼각형**이다.